

# 最后一卷

## 《高等数学（一）》

专科起点升本科

# 版权所有·翻版必究

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x-1} =$  ( )

- A. e
- B. 1
- C.  $e^{-1}$
- D. -e

2. 设  $b \neq 0$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin bx$  是  $x^2$  的 ( )

- A. 高阶无穷小量
- B. 等价无穷小量
- C. 同阶但不等价无穷小量
- D. 低阶无穷小量

3. 设函数  $f(x) = x \sin x$ , 则  $f'(\frac{\pi}{2}) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C.  $\frac{\pi}{2}$
- D.  $2\pi$

4. 函数  $f(x) = x^3 - 12x + 1$  的单调减区间为 ( )

- A.  $(-\infty, +\infty)$
- B.  $(-\infty, -2)$
- C.  $(-2, 2)$
- D.  $(2, +\infty)$

5. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  可导,  $f'(x) > 0$ . 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在

$(a, b)$  ( )

- A. 不存在零点
- B. 存在唯一零点
- C. 存在极大值点
- D. 存在极小值点

6. 设  $z = 3x^2 + 5y$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} =$  ( )

- A.  $5y$
- B.  $3x$

C.  $6x$

D.  $6x + 5$

7.  $\int \frac{3}{x} dx =$  ( )

A.  $-\frac{3}{x^2} + C$

B.  $-3\ln|x| + C$

C.  $\frac{3}{x^2} + C$

D.  $3\ln|x| + C$

8.  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx =$  ( )

A.  $-e$

B.  $-e^{-1}$

C.  $e^{-1}$

D.  $e$

9. 微分方程  $y' = 6$  有特解  $y =$  ( )

A.  $6x$

B.  $3x$

C.  $2x$

D.  $x$

10. 设球面方程为  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$ , 则该球的球心坐标与半径分别为 ( )

A.  $(-1, 2, -3); 2$

B.  $(-1, 2, -3); 4$

C.  $(1, -2, 3); 2$

D.  $(1, -2, 3); 4$

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = 3$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$  的间断点为  $x =$  \_\_\_\_\_.

13. 设  $y = \frac{x}{1+x}$ , 则  $y' =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $y = 5 + \ln x$ , 则  $dy =$  \_\_\_\_\_.

15. 设  $y = x^3 + 2$ , 则  $y'' =$  \_\_\_\_\_.

16.  $\int \cos(x+2) dx =$  \_\_\_\_\_.

17. 过坐标原点且与平面  $2x - y + z + 1 = 0$  平行的平面方程为 \_\_\_\_\_.

18. 设  $z = xy$ , 则  $dz =$  \_\_\_\_\_.

19.  $\int_0^1 e^{3x} dx =$  \_\_\_\_\_.

20. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  的收敛半径  $R =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题 (21~28 小题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。)

21. 计算  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$ .

22. 求函数  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  的极大值与极小值.

23. 计算  $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

24. 设  $z = x^2y - xy^3$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

25. 设  $y = y(x)$  满足  $2y + \sin(x+y) = 0$ , 求  $y'$ .

26. 判定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{5^n}$  的收敛性.

27. 设  $l$  是曲线  $y = x^2 + 3$  在点  $(1, 4)$  处的切线, 求由该曲线, 切线  $l$  及  $y$  轴围成的平面图形的面积  $S$ .

28. 求微分方程  $y' + \frac{1}{x}y = x$  的通解.

### 参考答案及解析

#### 一、选择题

1. 【答案】C

【解析】  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x-1} = e^{\ln(x-1)} = e^{-1}$ .

2. 【答案】D

【解析】 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx} \cdot b \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ , 故  $\sin bx$  是比  $x^2$  低阶的无穷小量, 即

$\sin bx$  是  $x^2$  的低阶无穷小量.

3. 【答案】B

【解析】 因为  $f'(x) = \sin x + x \cos x$ , 所以  $f'(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$ .

4. 【答案】C

【解析】  $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = -2$  或  $x = 2$ . 当  $-2 < x < 2$

时,  $f'(x) < 0$ , 即函数  $f(x)$  的单调减区间为  $(-2, 2)$ .

5. 【答案】B

【解析】由题意知,  $f(x)$  在  $(a, b)$  上单调递增, 且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内存在唯一零点.

6. 【答案】C

【解析】因为  $z = 3x^2 + 5y$ , 故  $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x$ .

7. 【答案】D

【解析】 $\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{dx}{x} = 3 \ln |x| + C$ .

8. 【答案】C

【解析】 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-a}) = e^{-1}$ .

9. 【答案】A

【解析】 $y' = 6$ ,  $dy = 6dx$ , 两边同时积分得  $y = 6x + C$ , 故只有 A 项符合通解的形式 ( $C = 0$ ).

10. 【答案】C

【解析】 $(x - 1)^2 + [y - (-2)]^2 + (z - 3)^2 = 2^2$ , 所以, 该球的球心坐标与半径分别为  $(1, -2, 3), 2$ .

## 二、填空题

11. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{ax} = \frac{2}{a} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{a} = 3$ , 则  $a = \frac{2}{3}$ .

12. 【答案】2

【解析】函数  $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$  在  $x = 2$  处无定义, 故  $x = 2$  为  $f(x)$  的间断点.

13. 【答案】 $\frac{1}{(1+x)^2}$

【解析】因为  $y = \frac{x}{1+x}$ , 所以  $y' = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$ .

14. 【答案】 $\frac{1}{x} dx$

【解析】因为  $y = 5 + \ln x$ , 故  $y' = \frac{1}{x}$ , 所以  $dy = y' dx = \frac{1}{x} dx$ .

15. 【答案】 $6x$

【解析】因为  $y = x^3 + 2$ , 所以  $y' = 3x^2, y'' = 6x$ .

16. 【答案】 $\sin(x+2) + C$

【解析】 $\int \cos(x+2) dx = \int \cos(x+2) d(x+2) = \int d[\sin(x+2)] = \sin(x+2) + C$ .

17. 【答案】 $2x - y + z = 0$

【解析】平面  $2x - y + z + 1 = 0$  的法向量  $n = (2, -1, 1)$ , 因为所求平面与已知平面平行, 故所求平面的法向量也为  $n = (2, -1, 1)$ , 设所求平面方程为  $2x - y + z + a = 0$ , 又因所求平面过原点, 故  $a = 0$ , 即所求平面方程为  $2x - y + z = 0$ .

18. 【答案】 $y dx + x dy$

【解析】 因为  $z = xy$ , 故  $\frac{\partial z}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ , 所以  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ydx + xdy$ .

19. 【答案】  $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

【解析】  $\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - 1)$ .

20. 【答案】 1

【解析】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ , 故收敛半径  $R = 1$ .

### 三、解答题

21. 【答案】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

22. 【答案】

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x_1 = -1, x_2 = 1$ .

又  $f''(x) = 6x$ , 可知  $f''(-1) = -6 < 0$ ,

$$f''(1) = 6 > 0.$$

故  $x = -1$  为  $f(x)$  的极大值点, 极大值  $f(-1) = 7$ ;

$x = 1$  为  $f(x)$  的极小值点, 极小值  $f(1) = 3$ .

23. 【答案】

设  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2, dx = 2tdt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2tdt \\ &= 2 \int e^{-t} dt \\ &= -2e^{-t} + C \\ &= -2e^{-\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

24. 【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 3y^2.$$

25. 【答案】

将  $2y + \sin(x+y) = 0$  两边对  $x$  求导, 得

$$2y' + \cos(x+y) \cdot (1+y') = 0.$$

$$\text{解得 } y' = -\frac{\cos(x+y)}{2 + \cos(x+y)}.$$

26. 【答案】

因为  $u_n = \frac{5n+1}{5^n} > 0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{5n+1}{5^n}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{5n+6}{5n+1} = \frac{1}{5} < 1,$$

所以原级数收敛.

27. 【答案】

$$y = x^2 + 3, y' = 2x.$$

$$\text{切点}(1, 4), y'(1) = 2.$$

故切线  $l$  的方程为

$$y = 2x + 2.$$

$$S = \int_0^1 [(x^2 + 3) - (2x + 2)] dx$$

$$= \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}.$$

28. 【答案】

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left( \int x^2 dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left( \frac{1}{3}x^3 + C \right).$$