

最后一卷

《高等数学（二）》

专科起点升本科

版权所有·翻版必究

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x$ 是 $2x$ 的 ()

- A. 低阶无穷小量
- B. 等价无穷小量
- C. 同阶但不等价无穷小量
- D. 高阶无穷小量

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} =$ ()

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. ∞

3. 设函数 $y = e^x - \ln 3$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ ()

- A. e^x
- B. $e^x + \frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{3}$
- D. $e^x - \frac{1}{3}$

4. 设函数 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) =$ ()

- A. -1
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. 0
- D. 1

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续且不恒为零, 则下列各式中不恒为常数的是 ()

- A. $f(b) - f(a)$
- B. $\int_a^b f(x) dx$
- C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- D. $\int_a^x f(t) dt$

6. $\frac{d}{dx} \int_0^x (t+1)^2 dt =$ ()

A. $(x+1)^2$

B. 0

C. $\frac{1}{3}(x+1)^3$

D. $2(x+1)$

7. $\int (x^{-2} + \sin x) dx =$ ()

A. $-2x^{-1} + \cos x + C$

B. $-2x^{-3} + \cos x + C$

C. $-\frac{x^{-3}}{3} - \cos x + C$

D. $-x^{-1} - \cos x + C$

8. 曲线 $y = |x|$ 与直线 $y = 2$ 所围成的平面图形的面积为 ()

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

9. 设函数 $z = \cos(x+y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} =$ ()

A. $\cos 2$

B. $-\cos 2$

C. $\sin 2$

D. $-\sin 2$

10. 设事件 A, B 相互独立, A, B 发生的概率分别为 0.6, 0.9, 则 A, B 都不发生的概率为 ()

A. 0.54

B. 0.04

C. 0.1

D. 0.4

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{4}{x}} =$ _____.

12. 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 的间断点为 $x =$ _____.

13. 设函数 $y = \ln(4x - x^2)$, 则 $y'(1) =$ _____.

14. 设函数 $y = e^{x+1}$, 则 $y'' =$ _____.

15. $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + 1) dx =$ _____.

16. 设曲线 $y = ax^2 + 2x$ 在点 $(1, a+2)$ 处的切线与直线 $y = 4x$ 平行, 则 $a =$ _____.

17. $\int 2xe^{x^2} dx =$ _____.

18. $\int d(x \ln x) =$ _____.

19. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ _____.

20. 设二元函数 $z = e^{\frac{1}{x+y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

三、解答题 (21~28 小题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤。)

21. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

22. 设函数 $y = \sin x^2 + 2x$, 求 dy .

23. 计算 $\int \frac{x}{4+x^2} dx$.

24. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy = 1$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

25. 计算 $\int_1^e \ln x dx$.

26.

设曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$, x 轴及直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面图形为 D . 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内求一点 x_0 , 使直线 $x = x_0$ 将 D 分为面积相等的两部分.

27. 求二元函数 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2 + 3x$ 的极值.

28. 从装有 2 个白球, 3 个黑球的袋中任取 3 个球, 记取出白球的个数为 X .

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$, 故 $\sin 3x$ 是 $2x$ 的同阶但不等价无穷小量.

2. 【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1.$

3. 【答案】A

【解析】 因为 $y = e^x - \ln 3$, 故 $\frac{dy}{dx} = y' = (e^x - \ln 3)' = e^x.$

4. 【答案】A

【解析】 因为 $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$, 所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1.$

5. 【答案】D

【解析】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数为 $F(x)$, A 项, $[f(b) - f(a)]' = 0$; B 项, $\left[\int_a^b f(x) dx\right]' = [F(b) - F(a)]' = 0$; C 项, $\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)\right]' = [f(a)]' = 0$; D 项, $\left[\int_a^x f(t) dt\right]' = f(x)$, 故 A、B、C 项恒为常数, D 项不恒为常数.

6. 【答案】A

【解析】 因为 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$, 故 $\frac{d}{dx} \int_0^x (t+1)^2 dt = (x+1)^2.$

7. 【答案】D

【解析】 $\int (x^{-2} + \sin x) dx = \int x^{-2} dx + \int \sin x dx = -x^{-1} - \cos x + C$ (C 为任意常数).

8. 【答案】B

【解析】 因所围成的图形关于直线 $x = 0$ 对称, 故 $S = 2 \int_0^2 (2-x) dx = 2 \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = 4.$

9. 【答案】D

【解析】 因为 $z = \cos(x+y)$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x+y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = -\sin 2.$

10. 【答案】B

【解析】 事件 A, B 相互独立, 则 \bar{A}, \bar{B} 也相互独立, 故 $P(\bar{A} \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-0.6) \times (1-0.9) = 0.04.$

二、填空题

11. 【答案】 $e^{-\frac{2}{3}}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{4}{3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{2}{3}}.$

12. 【答案】1

【解析】 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无定义, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续, 则 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点.

13. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $y = \ln(4x - x^2)$, 则 $y' = \frac{4-2x}{4x-x^2}$, 故 $y'(1) = \frac{2}{3}.$

14. 【答案】 e^{x+1}

【解析】 因为 $y = e^{x+1}$, 故 $y' = e^{x+1}$, $y'' = e^{x+1}$.

15. 【答案】 2

【解析】 $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + 1) dx = \int_{-1}^1 x^3 \cos x dx + 2$. 因为函数 $f(x) = x^3 \cos x$ 在 $[-1, 1]$ 上为奇函数, 故 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, 即 $\int_{-1}^1 (x^3 \cos x + 1) dx = 2$.

16. 【答案】 1

【解析】 因为该切线与直线 $y = 4x$ 平行, 故切线的斜率 $k = 4$, 而曲线斜率 $y'(1) = 2a + 2$, 故 $2a + 2 = 4$, 即 $a = 1$.

17. 【答案】 $e^{x^2} + C$

【解析】 $\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$.

18. 【答案】 $x \ln x + C$

【解析】 $\int d(x \ln x) = x \ln x + C$ (C 为任意常数).

19. 【答案】 1

【解析】 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$.

20. 【答案】 $-\frac{1}{(x+y)^2} e^{\frac{1}{x+y}}$

【解析】 $z = e^{\frac{1}{x+y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{1}{x+y}} \left(\frac{1}{x+y}\right)' = -\frac{1}{(x+y)^2} e^{\frac{1}{x+y}}$.

三、解答题

21. 【答案】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

22. 【答案】

因为 $y' = (x^2)' \cos x^2 + 2$
 $= 2x \cos x^2 + 2$,
 故 $dy = (2x \cos x^2 + 2) dx$.

23. 【答案】

$$\int \frac{x}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{4+x^2} d(4+x^2) \\ = \frac{1}{2} \ln(4+x^2) + C.$$

24. 【答案】

方程 $e^y + xy = 1$ 两边对 x 求导, 得
 $e^y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$.
 于是 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{e^y + x}$.

25. 【答案】

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d(\ln x) \\ &= e - x \Big|_1^e \\ &= 1.\end{aligned}$$

26. 【答案】

依题意有 $\int_0^{x_0} \sin x dx = \int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, 即

$$-\cos x \Big|_0^{x_0} = -\cos x \Big|_{x_0}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$1 - \cos x_0 = \cos x_0,$$

$$\cos x_0 = \frac{1}{2},$$

$$\text{得 } x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

27. 【答案】

$$f'_x = x - y + 3, f'_y = -x + 2y.$$

$$\text{由 } \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \text{ 解得 } x = -6, y = -3.$$

$$f''_{xx}(x, y) = 1, f''_{yy}(x, y) = -1, f''_{xy}(x, y) = 2.$$

$$A = f''_{xx}(-6, -3) = 1, B = f''_{xy}(-6, -3) = -1,$$

$$C = f''_{yy}(-6, -3) = 2.$$

$$B^2 - AC = -1 < 0, A > 0,$$

故 $f(x, y)$ 在点 $(-6, -3)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(-6, -3) = -9$.

28. 【答案】

(1) X 可能的取值为 0, 1, 2.

$$P\{X = 0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_1^3}{C_3^3} = 0.1,$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_1^2}{C_3^3} = 0.6,$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_1^1}{C_3^3} = 0.3,$$

因此 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2.$$